МУНИЦИПАЛЬНОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 86
городского округа Тольятти

«Утверждаю»
Директор МБУ СОШ №86
__________ Л.Н. Беднова

Программа принята на основании решения педагогического совета МБУ СОШ №86
Протокол № 13
от 11 июля 2013 г.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА

«Избранные вопросы математики»

Класс: 7

Срок образования (обучения): 1 год

1 час в неделю

Составители: учитель математики Великанова З.С.
Рецензент: к.п.н. доцент кафедры гуманитарных и естественных наук филиала Российского государственного социального университета в г. Тольятти Жирнова В.Н.

Тольятти 2013

Рецензия

на программу курса «Избранные вопросы математики».

Данная программа по математике составлена в соответствии с действующей программой для общеобразовательных учреждений и предусматривает работу в 7 классах общеобразовательных школ, гимназий и лицеев в объеме 34 учебных занятий.

Программа рассчитана на учащихся 7 классов.

Актуальность программы обусловлена реформами в современном образовании, направленностью школы на развитие способностей личности ребенка.

В программе продуманы логика и структура программы: пояснительная записка с постановкой целей и раскрытием форм и методов работы на уроках, условия реализации программы и тематическое содержание. Последнее свидетельствует о верном методическом подходе, научном характере работы. Программа построена с учетом принципов системности, научности, доступности, перспективности и преемственности между разделами курса.

Программа соответствует поставленной цели – углубление знаний учащихся и развитие познавательного интереса учащихся к математике.

Программа, в целом, соответствует требованиям образовательного стандарта.

Программа спецкурса направлена на интеллектуальное развитие учащегося, совершенствование логического мышления, формирование мотивации к обучению. Она способствует расширению кругозора учащегося, его подготовке к участию в олимпиадах и интеллектуальных конкурсах и проектах.

Рецензируемую программу можно рекомендовать для использования в учебном процессе.

КАНЦЕЛЯРИЯ

Жирнова В.Н. к.п.н., доцент кафедры гуманитарных и естественных наук филиала Российского государственного социального университета в г. Тольятти

Пояснительная записка

В условиях профилизации и модернизации школы появилась необходимость повышения качества школьного образования и создания специализированной подготовки, ориентированной на индивидуализацию и социализацию учащихся.

В настоящее время практика вступительных экзаменов оторвалась от школы, настолько велика разница между требованиями, предъявляемыми к выпускнику школой и ВУЗом. В определенной степени одним из способов устранения имеющегося несоответствия является изучение предлагаемого курса, направленного на расширение знаний учащихся, повышение уровня математической подготовки через решение большого класса задач, которые обладают диагностической ценностью, интересны и разнообразны, с их помощью можно повышать качество знаний основных разделов математики, развивать уровень математического и логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности.

Программа курса разработана для классов естественно – математического и социально – экономического профилей и предназначена для организации систематического изучения вопросов, направленных на углубление. В процессе изучения данного курса учащиеся приобретут навыки рационального поиска решения таких задач и выстраивания алгоритмов, а в дальнейшем смогут реализовать полученные знания и умения при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗ и продолжению образования.

Программа рассчитана на 1 ч в неделю, в общей сложности – на 34 ч в учебный год. Преподавание курса строится как углублённое изучение вопросов, предусмотренных программой основного курса. Углубление реализуется на базе обучения методам и приемам решения математических задач, требующих применения высокой логической и операционной культуры, развивающих научно-теоретическое и алгоритмическое мышление учащихся. Программные занятия дают возможность шире и глубже изучать материал, задачи повышенной трудности, больше рассматривать теоретический материал и внедрять принцип опережения. Проводимые занятия дают возможность разрешить основную задачу: как можно полнее развить потенциальные творческие способности каждого ученика, не ограничивая заранее сверху уровень сложности используемого задачного материала, повысить уровень математической подготовки учащихся.

Цели данного курса:

1) Повысить интерес к предмету.

2) Эффективная подготовка учащихся 7-х классов к государственной аттестации в новой форме (ГИА).

3) Развитие личности, ответственной за осмысление законов математики.

4) Овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смешанных дисциплин, для продолжения образования.

5) Интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности.

Задачи курса:

1) Развитие творческих способностей учащихся на основе проб.

2) Воспитание личности, умеющей анализировать, самоанализировать и создавать программу саморазвития.

3) Развития мышления учащихся, формирование у них умений самостоятельно приобретать и применять знания.

4) Формирование познавательного интереса к математике, развитие творческих способностей, осознание мотивов учения.

5) Формирование умений выдвигать гипотезы, строить логические умозаключения, пользоваться методами аналогии и идеализаций.

Учебно - тематический план

1 час в неделю (всего 34 часа)

№	дата	Тема	Кол-во часов
1		Периодические дроби	2
2		Дроби	2
3		Проценты	2
4		Задачи на концентрацию и процентное содержание	3
5		Модуль числа. Решение линейных уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля	3
6		Графики функций, содержащих переменную под знаком модуля	3
7		Графическое решение уравнений	2
8		Линейные уравнения с параметрами	3
9		Линейные диофантовы уравнения	3
10		Двузначные и трехзначные числа	2
11		Формулы сокращенного умножения	3
12		Деление многочлена на многочлен	3
13		Повторение	3

Содержание курса

Содержание программы курса включает теоретический и практический материал. Теоретическое содержание составляют основные понятия, способы решения задач и их обоснование. Практическое содержание – это практикум по решению задач различных типов, разного уровня сложности, в процессе которого в арсенал приемов и методов человеческого мышления естественным образом включаются индукция и дедукция, наблюдение и сравнение, анализ и аналогия, обобщение и конкретизация, классификация и систематизация. Данный курс ориентирован на категорию учащихся, обладающих достаточной математической подготовкой, проявляющих интерес к предмету, и желающих овладеть различными умениями, навыками и приемами для решения математических задач.

I. Периодические дроби

Перевести обыкновенную дробь в десятичную легко – надо всего лишь делить уголком. При этом получается либо конечная десятичная дробь (когда знаменатель несократимой обыкновенной дроби не делится ни на какие простые числа, кроме 2 и 5), либо периодическая дробь (чисто периодическая – когда знаменатель не делится ни на 2, ни на 5; смешанная периодическая – в остальных случаях).

Периодическая дробь - это бесконечная десятичная дробь, в которой с некоторого места, периодически повторяется определенная группа цифр. Например, 2,5131313...
Обычно такую дробь записывают короче: 2,5(13).Если в периодической дроби повторяющаяся группа цифр (период) расположена непосредственно после запятой, то такую дробь называют чисто периодической; в противном случае говорят, что десятичная дробь имеет предпериод, и называют дробь смешанной периодической.

Общее правило обращения периодических десятичных дробей в обыкновенные:
Чисто периодическая правильная десятичная дробь, равна обыкновенной дроби, в числителе которой записан период, а знаменатель состоит из стольких девяток, сколько цифр в периоде.
Смешанная правильная периодическая десятичная дробь равна обыкновенной дроби, в числителе которой стоит разность между числом, образованным цифрами, стоящими после запятой до начала второго периода, и числом, образованным цифрами, стоящими после запятой до начала первого периода; знаменатель состоит из стольких девяток, сколько цифр в периоде, и стольких нулей, сколько цифр стоит до начала первого периода.

Например:

$0,(142857)=\dfrac{142857}{999999}=\dfrac{1}{7}$; $0,24(617)=\dfrac{24617-24}{99900}=\dfrac{24593}{99900}$.

<u>II. Дроби</u>

1. Упростите выражение:

$а)\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}$; $б)\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$; $в)\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$; $г)\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}$.

2. Представьте в виде разности дробей:

$а)\dfrac{1}{1\cdot 2}$; $б)\dfrac{1}{3\cdot 4}$; $в)\dfrac{1}{x(x+1)}$; $г)\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$; $д)\dfrac{1}{2\cdot 4}$; $е)\dfrac{1}{3\cdot 5}$.

3. Вычислите:

$а)\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dots+\dfrac{1}{9\cdot 10}$; $б)\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dots+\dfrac{1}{99\cdot 100}$;

$в)\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\dots+\dfrac{1}{98\cdot 100}$; $г)\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 8}+\dfrac{1}{8\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 14}+\dfrac{1}{14\cdot 17}$;

$д)\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\dfrac{1}{10\cdot 13}+\dfrac{1}{13\cdot 16}$;

$е)\dfrac{1}{3\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 15}+\dfrac{1}{15\cdot 19}+\dfrac{1}{19\cdot 23}$;

$ж)\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dots+\dfrac{1}{n(n+1)}$; $з)\dfrac{1}{2\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 12}+\dfrac{1}{12\cdot 17}+\dots+\dfrac{1}{(5m-3)(5m+2)}$;

$и)\dfrac{1}{5\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 17}+\dfrac{1}{17\cdot 23}+\dots+\dfrac{1}{(6k-1)(6k+5)}$; $к)\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42}+\dfrac{1}{56}+\dfrac{1}{72}+\dfrac{1}{90}+\dfrac{1}{110}+\dfrac{1}{132}$.

Ответы: а) $\dfrac{9}{10}$; б) $\dfrac{99}{100}$; в) $\dfrac{49}{200}$; г) $\dfrac{5}{34}$; д) $\dfrac{5}{16}$; е) $\dfrac{5}{69}$.

Указание. Используйте равенство $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.

4. Докажите, что при любом натуральном n:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dots+\dfrac{1}{(n-1)n}<1$;

$б)\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\dots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}<\dfrac{1}{2}$.

5. Упросите выражение:

$а)\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$;

$б)\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)};$

$в)\dfrac{2}{x(x+2)}+\dfrac{2}{(x+2)(x+4)};$

$г)\dfrac{1}{x(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+6)};$

$г)\dfrac{1}{x(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+6)}+\dfrac{1}{(x+6)(x+9)}+\dfrac{1}{(x+9)(x+12)}+$

$+\dfrac{1}{(x+12)(x+15)}.$

6. Найти такую дробь, которая не изменится от прибавления к числителю 30, а к знаменателю 40.

Ответ: $\dfrac{3}{4}$.

7. Что больше: $\dfrac{10001}{10002}$ *или* $\dfrac{100001}{100002}$?

8. Что больше: $\dfrac{12345}{54321}$ *или* $\dfrac{12346}{54322}$?

III. Проценты

Процентом от любой величины называется одна сотая часть.

Любое число процентов можно выразить десятичной дробью или натуральным числом. Для этого нужно число, стоящее перед знаком %, разделить на 100.

Пример 1. $47\% = \dfrac{47}{100}; 300\% = \dfrac{300}{100} = 3.$

Чтобы выразить число в процентах, его надо умножить на 100.

Пример 2. $0{,}47 = (0{,}47 \cdot 100)\% = 47\%.$

Простейшие задачи на проценты:

1. Нахождение процента от числа.

Чтобы найти процент от числа, надо это число умножить на соответствующую дробь.

Пример 3. 13% от 2000 руб. равны $2000 \cdot 0{,}13 = 260$ руб.

2. Нахождение числа по его проценту.

Чтобы найти число по его проценту, надо часть, соответствующую этому проценту, разделить на соответствующую дробь.

Пример 4. Если 8,4 кг есть 12% массы штанги, то масса штанги равна $8{,}4 : 0{,}12 = 70$ кг.

3. Нахождение процентного отношения двух чисел.

Чтобы узнать, сколько процентов одно число составляет от второго, надо первое число разделить на второе и результат умножить на 100.

Пример 5. 18 г. соли в растворе 240 г. составляет $\frac{18\cdot100}{240}=7{,}5\%$ раствора.

IV. Задачи на концентрацию и процентное содержание

В задачах, связанных с использованием понятий "концентрация" и "процентное содержание", речь идёт о составлении сплавов, растворов или смесей несколько веществ.

Основные допущения, которые принимаются в задачах подобного рода, состоят в следующем:

а) все получающиеся сплавы или смеси однородны;

б) при смешивании двух растворов, имеющих объёмы v_1+v_2, получается смесь, объём которой v равен сумме v_1+v_2.

Такое допущение не представляет собой закона физики и не всегда выполняется в действительности. На самом деле при смешивании двух растворов не объем, а масса равняется сумме составляющих её компонент.

Рассмотрим смесь трёх компонент A, B, C. Объём смеси v складывается из объёмов чистых компонент: $v=v_A+v_B+v_C$, а три отношения $d_A=\frac{v_A}{v}$, $d_B=\frac{v_B}{v}$, $d_C=\frac{v_C}{v}$ показывают, какую долю полного объёма смеси составляют объёмы отдельных компонент $v_A=d_Bv; v_B=d_Bv; v_C=d_Cv$.

Отношения объёма чистой компоненты (v_A) в растворе ко всему объёму смеси v: $d_A=\frac{v_A}{v}=\frac{v_A}{v_A+v_B+v_C}$ называется объёмной концентрацией этой компоненты.

Концентрация – это безразмерная величина.

Сумма концентраций всех компонент, составляющих смесь, равна единице: $d_A+d_B+d_C=1$.

Объёмным процентным содержанием компоненты A называется величина $P=d_A\cdot 100\%$, т. е. концентрация этого вещества, выраженная в процентах.

Если известно процентное содержание вещества A, то его концентрация находится по формуле $d_A=\frac{P_A}{100}$.

Таким же способом определяется массовая концентрация и процентное содержание, а именно как отношение массы чистого вещества A в сплаве к массе всего сплава. О какой концентрации, объёмной или массовой, идёт речь в конкретной задаче, всегда видно из условия.

Задача 1. Имеется кусок сплава с оловом массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому сплаву, чтобы получившейся новый сплав содержал 40% меди?

Решение: Пусть масса олова, которую надо добавить к сплаву, равна x кг. Тогда получится сплав массой (12+x) кг, содержащий 40% меди. Значит, в новом сплаве имеется $\frac{12+x}{100}40$ кг меди. Исходный сплав массой 12 кг содержал 45% меди, т.е. меди в нём было $\frac{12}{100}\cdot 45$ кг. Так как масса меди и в имевшемся, и в сплаве одна и та же, то можно записать следующее уравнение: $\frac{(12+x)40}{100}=\frac{12}{100}\cdot 45$. Решив его, получим x = 1,5.

Ответ: 1,5 кг.

Задача 2. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько стали того и другого сорта взять, чтобы после переплавки получить 140 т стали с содержанием никеля 30%?

Решение: Пусть масса стали первого сорта равна x т, тогда стали второго сорта надо взять (140 - x) т. Содержание никеля в стали первого сорта составляет 5%, значит, в x т стали первого сорта содержится $x\cdot 0{,}05$ т никеля. Содержание никеля в стали второго сорта составляет 40%, значит, в (140 - x) т стали второго сорта содержится $(140-x)0{,}4$ т никеля. По условию после объединения взятых двух сортов должно получиться 140 т стали с 30%-ным содержанием никеля, т. е. после переплавки в полученной

стали должно быть $140\cdot 0{,}3$ т никеля. Но это количество никеля складывается из $x\cdot 0{,}05$ т, содержащихся в стали первого сорта, и из $(140-x)0{,}4$ т, содержащихся в стали второго сорта. Таким образом, запишем уравнение $x\cdot 0{,}05+(140-x)0{,}4=140\cdot 0{,}3$,

из которого находим x = 40. Следовательно, стали с 5%-ным содержанием никеля надо взять 40 т, а стали с 40%-ным содержанием – 100 т.

Ответ: 40 т, 100 т.

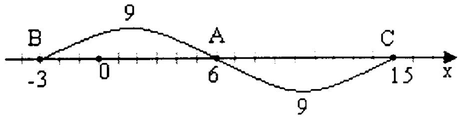
V. Модуль числа. Решение линейных уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля

Любое действительное число можно изобразить точкой числовой прямой. Расстояние этой точки от начала отсчета на этой прямой равно положительному числу или нулю, если точка совпадает с началом числовой прямой.

Расстояние точки, изображающей данное число на числовой прямой, от начала этой прямой называется модулем этого числа. Модуль числа а обозначается $|a|$. Геометрический смысл модуля удобно использовать при решении некоторых уравнений.

Пример 1. Решите уравнение: $|x - 6| = 9$.

Решение:



Если число 6 изобразить тачкой А , то по определению модуля следует, что точка X отстоит от точки А на расстоянии 9 единиц. Но на числовой прямой таких точек две. Одна имеет координату $x = 6 + 9 = 15$, другая $x = 6 - 9 = -3$. Следовательно, уравнение имеет два решения: $x = 15$ и $x = -3$.

Ответ: 15; -3.

Пример 2.Решите уравнение: $|x - 1| + |x - 3| = 6$.

Решение: Решить уравнение $|x - 1| + |x - 3| = 6$ – значит найти все такие точки на числовой оси Оx, для каждой из которых сумма расстояний от неё до точек с координатами 1 и 3 равна 6.

Ни одна из точек отрезка $[1;3]$ не удовлетворяет этому условию, так как сумма указанных расстояний для любой из них равна 2 (т.е. не равна 6). Вне этого отрезка существует только две искомые точки: точка с координатами 5 и точка с -1.

Ответ: 5; -1.

При решении уравнений, содержащих несколько выражений со знаком модуля, удобнее пользоваться алгебраическим определением модуля числа: модулем положительного числа и нуля является само число, модулем отрицательного числа называется противоположное ему положительное число.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Пример 3. $|2x - 12| + |6x + 48| = 160$.

Решение:

а) Найдём корни (нули) каждого выражения, содержащего знак модуля:

$2x - 12 = 0$, $\quad 6x + 48 = 0$,

$x = 6$, $\quad x = -8$.

б) Найденные значения x разбивают числовую прямую на три промежутка: $x < -8$, $-8 \leq x \leq 6$; $x > 6$. Решение данного уравнения рассматривается в каждом промежутке отдельно.

в) I. $x < -8$.

В данном промежутке оба выражения, стоящие под знаком модуля, отрицательны.

$$-(2x-12)-(6x+48)=160,$$

$$-2x+12-6x-48=160,$$

$$-8x=196,$$

$$x=-24{,}5.\ (x<-8).$$

II. $-8 \leq x \leq 6$. В данном промежутке первое выражение, стоящие под знаком модуля, отрицательно, а второе положительное,

$$-(2x-12)+(6x+48)=160,$$

$$-2x+12+6x+48=160,$$

$$4x=100,$$

$x = 25$ (не принадлежит данному промежутку).

III. $x > 6$.

Оба выражения, стоящие под знаком модуля, положительны.

$$(2x-12)+(6x+48)=160,$$

$$2x-12+6x+48=160,$$

$$8x=124,$$

$$x=15{,}8.\ (x>6).$$

Ответ: -24,5; 15,8.

<u>VI. Графики функций, содержащих переменную под знаком модуля</u>

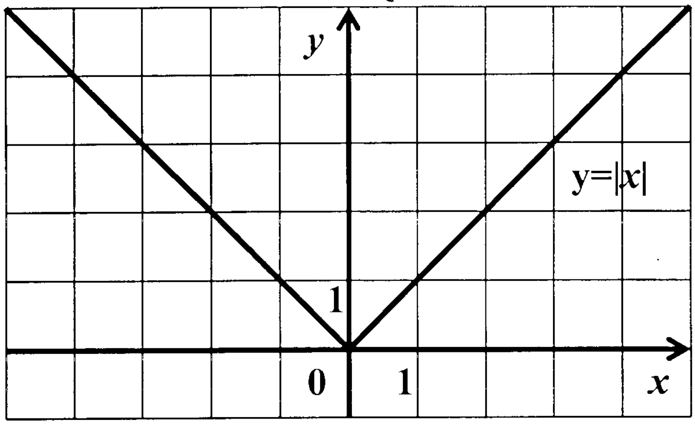
Для построения графиков функций, содержащих выражения под знаком модуля сначала находят корни выражений, стоящих под знаком модуля. Эти корни разбивают числовую прямую на промежутки. График строят в каждом промежутке отдельно.

В случае, когда только одно выражение стоит под знаком модуля и нет слагаемых без знака модуля, можно построить график функции, опустив знак модуля, а затем часть графика, расположенную в области отрицательных значений y, отобразить симметрично относительно оси Ox. Это вытекает из определения модуля числа.

Пример 1. Постройте график функции $y = |x|$.

Решение: По определению модуля числа имеем:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$



Используя график функции $y = |x|$, постройте график функции:

1. $y = |x| - 3.$
2. $y = |x| + 1.$
3. $y = |x - 1|.$
4. $y = |x + 2|.$
5. $y = |x - 1| - 2.$
6. $y = |x + 3| - 4.$
7. $y = 1 - |x|.$
8. $y = 2 - |x + 1|.$
9. $y = ||x| - 1|.$
10. $y = ||x + 2| - 4|.$
11. $y = ||x - 2| - 3| - 1.$
12. $y = |||x| - 3| - 2|.$
13. $y = |||1 - |x|| - 3| - 2|.$
14. $y = |2 - |x - 1||.$
15. $y = |||x - 2| - 1| - 3| + 2.$
16. $y = -||x| - 1| - 2.$

Пример 2. Постройте график функции: $y = |x - 1| - |2 - x| + 2.$

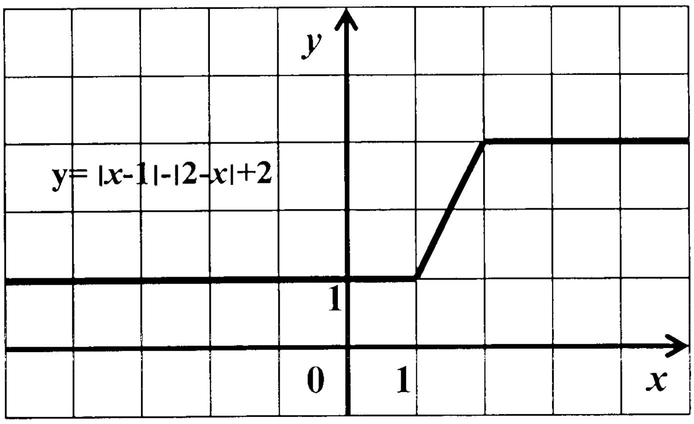
Решение: $x - 1 = 0$; $2 - x = 0$;

$x = 1.$ $x = 2.$

1) $x < 1$: $y = -x + 1 - 2 + x + 2$, $y = 1.$

2) $1 \leq x \leq 2$: $y = x - 1 - 2 + x + 2$, $y = 2x - 1.$

3) $x > 2$: $y = x - 1 + 2 - x + 2$, $y = 3.$



Постройте график функции:

1.$y = |x-1| + |x-2| + x.$ 2.$y = \left|\frac{1}{3}x - 2\right| + \left|3 + \frac{2}{3}x\right| - 3.$

3.$y = |x-3| + |1-x| - 4.$ 4.$y = 7 - |x-1| + |x+5|.$

5.$y = |x-1| + |x-2|.$ 6.$y = \frac{|x|}{x} + 2\frac{|x+1|}{x+1}.$

7.$y = 2x + 3\frac{|x-2|}{x-2}.$ 8.$y = \frac{|x-1|}{x-1}.$

9.$y = x + |x|.$ 10.$y = x - 3 + |x+2|.$

11.$y = |x-5| + |x-2|.$ 12.$y = \frac{|x-2|}{x-2} + \frac{|x-3|}{x-3}.$

13.$y = |2x-5| + 3x - 1.$ 14.$y = |x-1| + |x|.$

15.$y = |x+2| - |x| + |x-2|.$ 16.$y = |2x-4| - 1 + |x|.$

Постройте график уравнения:

1.$y + |y| = x.$ 2.$y = x|y|.$ 5.$|3-y| = |2-x| + 1.$

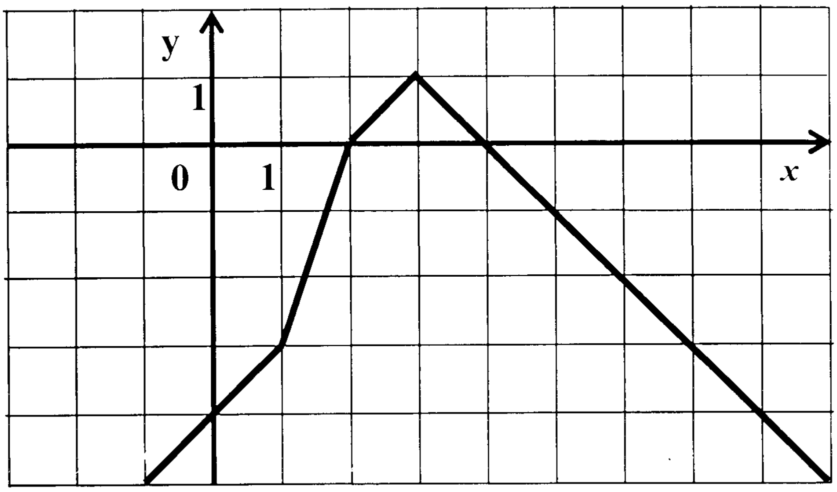
3.$|x| + |y| = 1.$ 4.$|y-2| = 3x - 4.$ 6.$|x| - |y| = 1.$

Пример 3. Постройте график функции: $y = |x-1| - |x-2| - |x-3|.$

Решение: Графиком функции является ломаная линия с вершинами в точках с абсциссами x = 1, x = 2, x = 3 . Найдём ординаты этих точек:

$$y(1) = -|1-2| - |1-3| = -1 - 2 = -3,$$
$$y(2) = |2-1| - |2-3| = 1 - 1 = 0,$$
$$y(3) = |3-1| - |3-2| = 2 - 1 = 1.$$

Значит, вершинами ломаной являются точки: (1;-3), (2;0), (3;1). Используя ещё две дополнительные точки (0;-4) и (4;0) , строим график функции.



Постройте график функции:

1.$y = |x-1| + |x+1|$.

2.$y = |x| + |x-2|$.

3.$y = |x-2| + 3$.

4.$y = |x-2| + |x-3| - 1$.

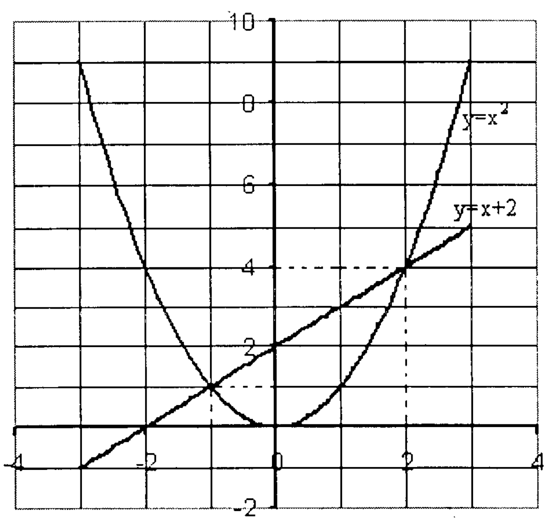
5.$y = |x+1| + |x+2| - |x| + 2|x-2|$.

VII. Графическое решение уравнений

Пример 1. Решить уравнение: $x^2 = x + 2$.

Решение: 1) Рассмотрим две функции: $y = x^2$, $y = x + 2$.

2). Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$, $y = x + 2$.



3) A(-1;1) и B(2;4) – точки пересечения графиков.

4) $x = -1$; $x = 2$ – корни уравнения.

5) Ответ: -1; 2.

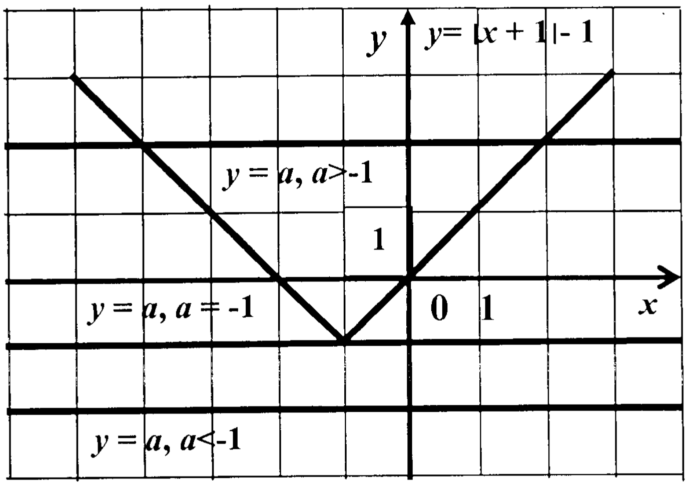
Некоторые задачи с параметрами, особенно задачи, связанные с разрешимостью и числом решений уравнений, наиболее удобно решать графическим методом.

Пример 2. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x+1| = a+1$.

Решение: Перепишем уравнение в виде $|x+1|-1 = a$.

1) Введём две функции: $y = |x+1|-1$; $y = a$.

2) Построим в одной системе координат графики функций $y = |x+1|-1$, $y = a$.



На основании рисунка получаем
Ответ: при $a < -1$ уравнение не имеет корней;

при $a = -1$ уравнение имеет одно решение;

при $a > -1$ уравнение имеет два корня.

VIII. Линейные уравнения с параметрами

Уравнение вида Аx = В, где А, В – выражения, зависящие от параметров, а x – неизвестное, называется линейным уравнением с параметрами.

Решить уравнение с параметрами – значит для всех значений параметров найти множество всех корней заданного уравнения.

Линейное уравнение Аx = В исследуется по следующей схеме.

1) Если А = 0 и В $\neq 0$, то уравнение не имеет решений ($x \in \varnothing$).

2) Если А = 0 и В = 0, то уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$ и удовлетворяется при любом x, т.е. решением уравнения будет множество всех действительных чисел ($x \in R$).

3) Если А $\neq 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{B}{A}$.

Пример 1. Для всех значений параметров k решить уравнение

$(k + 4)x = 2k + 1$.

Решение: Уравнение записано в стандартном виде Аx = В, поэтому его исследование проведём по указанной схеме.

1) Если $k + 4 = 0$, т.е. $k = -4$, то уравнение имеет вид

$0 \cdot x = -7$, откуда $x \in \varnothing$.

2) Если $k + 4 \neq 0$, т.е. $k \neq -4$, то обе части уравнения можно делить на $k + 4$. Тогда $x = \frac{2k+1}{k+4}$.

Ответ: если $k = -4$, то $x \in \varnothing$;

если $k \neq -4$, то $x = \frac{2k+1}{k+4}$.

Пример 2. Для всех значений параметров a и b решить уравнение $(a - 2)\,x = 4a + 3b$.

Решение: 1) $a = 2$. Уравнение имеет вид $0 \cdot x = 8 + 3b$.

Если $8 + 3b \neq 0$, т.е. $b \neq -\frac{8}{3}$, то это равенство ни при каком x не выполняется, поэтому $x \in \varnothing$.

Если $b = -\frac{8}{3}$, то уравнение примет вид $0 \cdot x = 0$, откуда следует: $x \in R$.

2) $a - 2 \neq 0$, т.е. $a \neq 2$. Тогда $x = \frac{4a+3b}{a-2}$.

Ответ: если $a = 2$, $b \neq -\frac{8}{3}$, то $x \in \varnothing$;

если $a = 2$, $b = -\frac{8}{3}$, то $x \in R$;

если $a \neq 2$, b- любое, то $x = \frac{4a+3b}{a-2}$.

IX. Линейные диофантовы уравнения

Определение. Уравнения, в которых неизвестные величины выражаются целыми числами, называются диофантовыми по имени математика Диофанта.

Рассмотрим уравнение

$$ax + by = c \ (a \neq 0, b \neq 0), \qquad (1)$$

коэффициенты, которого a, b и c – целые числа.

Пусть d = D (a; b) или d = (a; b) или d = НОD (a; b) - наибольший общий делитель a и b.

Правило 1. Если c не делится на наибольший общий делитель $(a; b)$, то уравнение (1) не имеет решений в целых числах (тем более в натуральных).

Правило 2. Если $c \in Z$ делится на НОD $(a; b)$, то уравнение (1) имеет целые решения. Если $c \in Z$ делится на НОD $(a; b)$, то уравнение (1) следует упростить, разделив обе его части на НОD $(a; b)$.

Правило 3. Если a и b –взаимно простые числа, то уравнение $ax + by = 1$ имеет решение в целых числах x и y.

Правило 4. Чтобы найти решение уравнения (1) при взаимно простых a и b , нужно сначала найти решение $(x_0; y_0)$ уравнения $ax + by = 1$; числа cx_0 и cy_0 составят решение уравнения (1).

Правило 5. Если коэффициенты a и b уравнения (1) взаимно просты, то все решения уравнения (1) получаются по формулам $x = x_1 - bn, y = y_1 + an, n \in Z$, где x_1 и y_1 одно из решений этого уравнения.

Пример 1. Решите диофантово уравнение $6x + 9y = 2$.

Решение: НОD (6; 9) = 3, а 2 на 3 не делится. Значит, данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: нет решений.

Пример 2. Решите в целых числах уравнение $28x - 40y = 60$.

Решение: НОD (28; 40) = 4, число 60 делится на 4. Значит, уравнение имеет решений в целых числах. Сократим уравнение на 4, получим уравнение $7x - 10y = 15$. Сначала подберём частное решение уравнения $7x - 10y = 1$. НОD (7; 10) = 1 . $x_0 = 3$ и $y_0 = 2$ - частное решение уравнения $7x - 10y = 1$. $x_1 = 3 \cdot 15 = 45$ и $y_1 = 2 \cdot 15 = 30$ - частное решение уравнения $7x - 10y = 15$.

Общее решение уравнения $7x - 10y = 15$ задаётся формулами

$x = 45 + 10t, y = 30 + 7t, t \in Z$.

Ответ: $(45 + 10t, 30 + 7t), t \in Z$.

Пример 3. Решите диофантово уравнение $6x + 9y = 3$. (*)

Решение: НОD (6; 9) = 3, число 3 делится на 3. Значит, уравнение имеет решений в целых числах. Сократим уравнение на 3, получим уравнение $2x + 3y = 1$.(1) Сначала подберём частное решение уравнения $2x + 3y = 1$. $x = 5$, $y = -3$ является частным решением уравнения (1), так как справедливо равенство $2 \cdot 5 + +3 \cdot (-3) = 1$.

В уравнении (1) заменим число 1 выражением $2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3)$ и преобразуем полученное уравнение:

$$2x + 3y = 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3),$$

$$2\,(x-5)+3\,(y+3)=0. \qquad (2)$$

Введём новые неизвестные:

$$x'=x-5,\ y'=y+3, \qquad (3)$$

уравнение (2) перепишем в виде

$$2x'+3y'=0. \qquad (4)$$

Все решения однородного уравнения (3) задаются формулами $x'=-3n, y'=2n,$ где n – любое целое число. Используя равенства (3), получим, что все решения уравнения (*) задаются формулами $x=5+x'=5-3n, y=-3+y'=-3+2n,$ где $n\in Z$.

Ответ: $(5-3n, -3+2n)$, $n\in Z$.

Линейные диофантовы уравнения применяются при решении задач.

Задача 1. У покупателя и продавца имеются монеты только по
2 р. и 5 р. Сможет ли покупатель заплатить за покупку
стоимостью 1 р.?

Решение: Если покупатель даст х монет по 2 р. и у монет по 5 р., то он заплатит $(2x+5y)$ р., или 1 р.

Следовательно, $2x+5y=1$. (1)

Пара (3; -1) является частным решением уравнения (1), так как $2\cdot 3+5\cdot(-1)=1$. Это означает, что покупатель может дать 3 монеты по 2 р. и получить сдачу 1 монету по 5р.

Общее решение диофантова уравнения (1) имеет вид
$x=3-5n, y=-1+2n$, где $n\in Z$.

Способов оплаты товара стоимостью 1 р. в задаче 1 бесконечно много. Если, например, у окажется отрицательным, то это означает, что покупатель должен получить сдачу монетами по 5 р.

Ответ: Сможет.

X. Двузначные и трёхзначные числа

Запись $\overline{ab}$ означает число, в котором a десятков и b единиц. Это число можно представить в виде многочлена: $\overline{ab}=10a+b$.

Запись $\overline{abc}$ означает число, в котором a сотен, b десятков и c единиц. Это число можно представить в виде многочлена: $\overline{abc}=100a+10b+c$.

Пример 1.Первая цифра трёхзначного числа 8. Если эту цифру переставить на последнее место, то число увеличится на 18. Найдите первоначальное число.

Решение: Пусть a – цифра десятков искомого числа, b – цифра его единиц. Тогда по условию задачи имеем: $\overline{ab8}-\overline{8ab}=18$, откуда $10\overline{ab} + 8 - 800 - \overline{ab} = 18$, $9\overline{ab} = 810$, $\overline{ab} = 90$, первоначальное число 890.

Ответ: 890.

XI. Формулы сокращенного умножения

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \cdots +$
$+ 2a_{n-1}a_n$;

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$;

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$;

$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^{n-k} + \ldots + a + 1)$;

$a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a + b)(a^{2m} - a^{2m-1}b + \ldots + (-1)^k a^{2m-k}b^k +$
$+ \cdots - ab^{2m-1} + b^{2m})$;

$a^{2m+1} + 1 = (a + 1)(a^{2m} - a^{2m-1} + \cdots + (-1)^k a^{2m-k} + \cdots - a + 1)$.

XII. Деление многочлена на многочлен

Чтобы разделить многочлен $F(x)$ на многочлен $f(x)$, надо:

1) расположить делимое и делитель по убывающим степеням x;

2) разделить старший член делимого на старший член делителя; полученный одночлен является первым членом частного;

3) первый член частного умножить на делитель, результат вычесть из делимого; полученная разность является первым остатком;

4) чтобы получить следующий член частного, надо с первым остатком поступить так же, как поступали с делимым в п. 2 и 3.

Это следует продолжить до тех пор, пока не будет получен остаток, равный нулю, или остаток, степень которого ниже степени делителя.

Пример 1. Выполните деление с остатком $x^3 - 3x + 2$ на $x + 2$.

Решение:

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 0x^2 - 3x + 2 & x + 2 \\ \cline{2-2} \underline{x^3 + 2x^2} & x^2 - 2x + 1 \\ \quad -2x^2 - 3x + 2 & \\ \quad \underline{-2x^2 - 4x} & \\ \qquad\quad x + 2 & \\ \qquad\quad \underline{x + 2} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

(первый остаток) $-2x^2 - 3x + 2$

(второй остаток) $x + 2$

Пример 2. Найдите все такие целые c, при которых дробь $\dfrac{c+7}{c-4}$ является целым числом.

Решение: Выделим целую часть из дроби.

$$\begin{array}{r|l} c+7 & c-4 \\ \cline{2-2} -\ c-4 & 1 \\ \cline{1-1} 11 & \end{array}$$

$\frac{c+7}{c-4}=1+\frac{11}{c-4}$, поэтому исходное число будет целым, если 11 кратно $c-4$. 11 – простое число, значит, его делителями будут
- 11, - 1, 1, 11. Решим 4 уравнения: $c-4=-11$; $c-4=-1$;
$c-4=1$; $c-4=11$.
Получаем $c=-7$; $c=3$; $c=5$; $c=15$.

Ответ: -7; 3; 5; 15.

Литература

1. Никольский С. М. и др. Алгебра: Учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2003.

2. Альхова З. Н., Макеева А. В. Внеклассная работа по математике. – Саратов: Лицей, 2002.

3. Утеева Р. А. Дифференцированные задания по математике. – Тольятти , 1996.

4. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. - М.: Наука, 1975.

5. Виленкин Н. Я. и др. Алгебра: Для 8 класса. : Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики /Н. Я. Виленкин и др., Под ред. Н. Я Виленкина. – М.: Просвещение, 1995.

6. Галицкий М. Л. и др. Сборник задач по алгебре для 8 – 9 классов. – М.: Просвещение, 1992.

7. Горбачёв Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004.

8. Макарычев Ю. Н. и др. Алгебра: Учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений. Под ред. С. А. Теляковского. – 10-е изд. – М.: Просвещение, 2001.

9. Сикорский К. П. Дополнительные главы по курсу математики 7 – 8 классов для факультативных занятий. Пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1969.

10. Спивак А. В. Тысяча и одна задача по математике: кн. для учащихся 5 – 7 кл. – 2-ое изд. - М.: Просвещение, 2005.

11. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебное пособие. Под ред. М. И. Сканави. - 3-е изд., доп. – М.: Высшая школа, 1978.

12. Виленкин Н. Я., Депман И. Я. За страницами учебника математики. – Москва: «Просвещение», 1999.

Муниципальное бюджетное учреждение средняя общеобразовательная школа № 47

Дополнительная образовательная программа

Избранные вопросы математики

Класс: 9
Срок образования (обучения): 1 год
1 час в неделю

Составитель:
учитель математики
Ражева О. С.

Тольятти, 2012 г.

Пояснительная записка

Данная программа составлена на основе программы по математике для учащихся 9 классов общеобразовательной школы с учетом углубления изучаемого материала и рассчитана на 34 часа в год. Она предназначена для повышения эффективности подготовки учащихся 9 класса к итоговой аттестации по математике и предусматривает их подготовку к дальнейшему математическому образованию.

Основная задача обучения математике в школе – обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества.

Наряду с решением основной задачи изучение данного курса предусматривает формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие их математических способностей, ориентацию на профессии, существенным образом связанных с математикой, подготовкой к обучению в вузе. В школе математика служит опорным предметом для изучения смежных дисциплин. Всё больше специальностей, требующих высокого уровня образования, связано с непосредственным применением математики. Таким образом, расширяется круг школьников, для которых математика становится профессионально значимым предметом.

Курс "Избранные вопросы математики» представляет углубленное изучение теоретического материала укрупненными блоками и расширяет математический кругозор учащихся. Есть много уравнений и неравенств, которые считаются для школьников задачами повышенной трудности. Для решения таких задач лучше применять не традиционные методы, а приёмы, которые не совсем привычны для учащихся. Данный курс ставит своей целью познакомить учащихся с различными, основанными на материале программы общеобразовательной средней школы методами решения, казалось бы, трудных задач, проиллюстрировать широкие возможности использования хорошо усвоенных школьных знаний, привить ученику навыки употребления нестандартных методов рассуждения при решении задач. Приводятся методы решения уравнений и неравенств, основанные на геометрических соображениях, свойствах функций (монотонность, ограниченность, четность) т.д.

В результате изучения этого курса будут использованы приемы парной, групповой деятельности для осуществления элементов самооценки, взаимооценки, умение работать с математической литературой и выделять главное. Очень важно организовать дифференцированный подход к учащимся, позволяющий избежать перегрузки и способствующий реализации возможностей каждого из них. При проведении занятий используются практикумы, зачёты, тесты, что позволяет повысить уровень математической подготовки и представляет возможность осознания правильности выбранного профиля обучения.

Актуальность предлагаемой программы объясняется расхождениями между стандартами математического образования и требованиями, предъявляемыми при сдаче экзамена. Особенность данной программы заключается в том, что она позволяет учащимся выйти за рамки школьного курса математики.

Цель курса: совершенствовать математическую культуру и творческие способности учащихся.

Основные задачи:

- обеспечение более широкой системы знаний и умений необходимых для продолжения обучения в старших классах любого профиля;
- обеспечение интеллектуального развития учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности;
- обеспечение дополнительной информации, расширяющей и углубляющей изучаемый материал; расширить представление об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;
- учащиеся должны приобрести умение решать задачи более высокой сложности, точно и грамотно формулировать изученные теоретические положения и излагать собственные рассуждения при решении задач;
- формирование поисково-исследовательского метода;
- формирование аналитического мышления, развитие памяти, кругозора, умение преодолевать трудности при решении более сложных задач.

Особенности курса:

- краткость изучения материала;
- практическая значимость для учащихся;
- нетрадиционные формы изучения материала;

Учащиеся должны приобрести умения решать задачи более высокой по сравнению с обязательным уровнем сложности, точно и грамотно формулировать изученные теоретические положения и излагать собственные рассуждения при решении задач, правильно пользоваться математической терминологией и символикой, применять рациональные приёмы вычислений и тождественных преобразований, использовать наиболее употребительные эвристические приёмы и т.д.

В результате изучения курса **учащиеся должны уметь:**

- решать задания с параметрами;
- преобразовывать выражения, решать уравнения и строить графики, содержащие знак модуля;
- использовать полученные знания при решении задач школьного курса математики, а также выходящие за рамки учебника и часто встречающиеся на олимпиадах;
- составлять алгоритмы для решения типичных задач.

Учебно-тематический план

1. Задачи с модулем – 4 ч.
2. Функции – 5 ч.
3. Алгебраические уравнения – 3 ч.
4. Задачи с параметрами – 4 ч.
5. Свойства квадратного корня – 3 ч.
6. Неравенства – 4 ч.
7. Текстовые задачи – 3 ч.
8. Последовательности – 5 ч.
9. Повторение курса – 3 ч.

Содержание курса

1. **Задачи с модулем. (4 ч.)**
   Преобразование, выражений, содержащих знак модуля. Решение уравнений с модулем. Построение графиков.

2. **Функции. (5 ч)**
   Дробно-линейная функция. График функции y=1/f(x). Построение графиков функций. Функции y = {x}, y = [x]. Применение свойств квадратичной функции к решению задач.

3. **Алгебраические уравнения. (3 ч)**
   Теорем Виета для решения уравнений высших степеней. Целые уравнения и способы их решения.

4. **Задачи с параметрами. (4 ч)**
   Аналитические решения основных типов задач. Свойства функций в задачах с параметрами. Задачи на исследование квадратного трехчлена с параметром. Графические методы решения задач с параметрами.

5. **Свойства квадратного корня. (3 ч)**
   Преобразование выражений $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. Преобразования выражений, содержащих квадратные корни.

6. **Неравенства. (4 ч)**
   Совокупности неравенств. Решение целых рациональных неравенств. Дробно – рациональные неравенства.

7. **Текстовые задачи. (3 ч)**
   Решение задач алгебраическим способом. Решение задач арифметическим способом.

8. **Последовательности. (5 ч)**
   Числовые последовательности. Суммирование последовательностей. Комбинированные задачи на прогрессии. Решение задач по теме «Последовательности» олимпиадного характера.

9. **Повторение курса. (3 ч).**

Учебно-тематическое планирование предмета дополнительного образования «Избранные вопросы математики», 9 класс

№ п/п	тема	Кол-во часов по разделу	Кол-во часов по теме	Основные понятия	Ожидаемый результат
	Задачи с модулем.	4		Модуль числа, уравнение с модулем, график функции с модулем.	Научиться преобразовывать выражения с модулем, решать уравнения и строить графики с модулем.
1.	Преобразование, выражений содержащих знак модуля.		1		
2.	Решение уравнений с модулем.		1		
3.	Построение графиков.		2		
	Функции.	5		Дробно-линейная функция, функции у = {x}, у = [x].	Научиться строить графики функций: дробно-линейной, у = {x}, у = [x]. Уметь применять свойства квадратичной функции к решению задач.
4.	Дробно-линейная функция.		1		
5.	График функции y=1/f(x).		1		
6.	Построение графиков функций. Функции у = {x}, у = [x].		1		
7.	Применение свойств квадратичной функции к решению задач.		2		
	Алгебраические уравнения.	3		Уравнение высшей степени, целые уравнения, целочисленное решение уравнения.	Уметь решать уравнения высших степеней, находить целочисленные решения уравнений.
8.	Теорем Виета для решения уравнений высших степеней.		1		
9.	Целые уравнения и способы их решения.		2		
	Задачи с параметрами.	4		Параметр, задачи с параметром, допустимое значение параметра	Научиться решать задачи с параметром.
10.	Аналитические решения основных типов задач.		1		
11.	Свойства функций в задачах с параметрами. Задачи на исследование квадратного трехчлена с параметром.		2		
12.	Графические методы решения задач с параметрами.		1		
	Свойства квадратного корня.	3		Формула двойного радикала	Уметь преобразовывать выражения, содержащих квадратные корни
13.	Преобразование выражений $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.		1		
14.	Преобразования выражений, содержащих квадратные корни.		2		
	Неравенства.	4		Совокупность неравенств, решение неравенства, целые неравенства, дробно-рациональные неравенства.	Уметь решать различные типы неравенств.
15.	Совокупности неравенств.		1		
16.	Решение целых рациональных неравенств.		1		
17.	Дробно – рациональные неравенства.		2		
	Текстовые задачи.	3		Алгебраический способ решения задачи, арифметический способ решения задачи.	Уметь решать текстовые задачи арифметическим и алгебраическим способами, составлять математическую модель к задаче.
18.	Решение задач алгебраическим способом.		2		
19.	Решение задач арифметическим способом.		1		
	Последовательности.	5		Последовательность,	Уметь решать

20	Числовые последовательности.		1	прогрессии, арифметическая и геометрическая прогрессии.	простые и комбинированные задачи на прогрессии.
21.	Суммирование последовательностей.		1		
22.	Комбинированные задачи на прогрессии.		1		
23.	Решение задач по теме «Последовательности» олимпиадного характера.		2		
	Повторение курса.	3			
24.	Задачи с параметрами.		1		
25.	Задачи с модулем.		1		
26.	Решение текстовых задач		1		

Литература

1. «Алгебра 9». Под редакцией Виленкина Н.Я. (Учебное пособие для учащихся с углубленным изучением математики). Москва. «Просвещение». 1998 г.

2. Алгебра 9 класс. (учебник для классов с углубленным изучением математики). Мордкович А. Г. Москва. Мнемозина, 2004 год.

3. «Факультативный курс по математике, 9 класс». Издательство Самарского областного института повышения квалификации и переподготовки работников образования. 1997 г.

4. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. «Алгебра». (Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса. Москва. «Просвещение». 2003 г.

5. Галицкий М.Л. «Сборник задач по алгебре, 8-9 класс». Москва. «Просвещение». 2001 г.